

Второй (практический) тур

9 класс

9.7. Осенний солнечный день

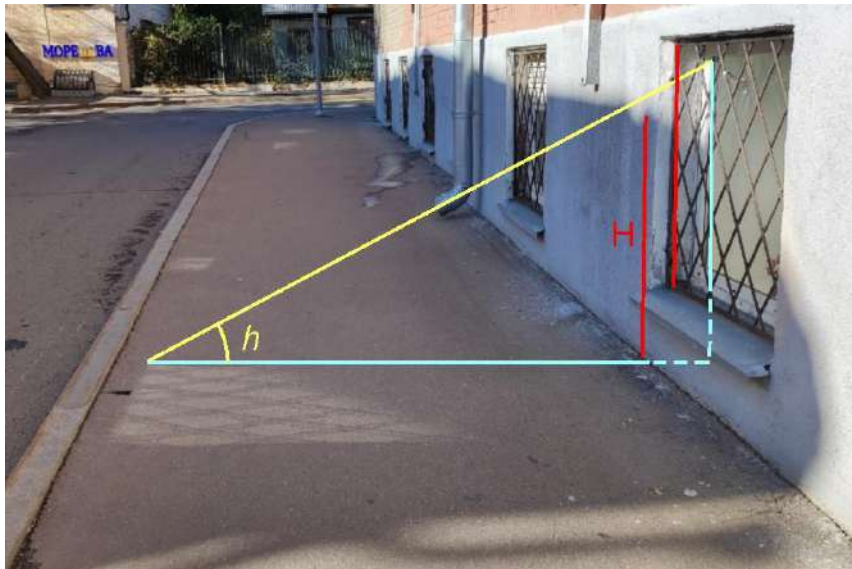
Условие. Перед вами фотография, сделанная 10 октября в Москве ($\varphi = 55^\circ$ с.ш., $\lambda = 38^\circ$ в.д.).

- 1) Оцените высоту Солнца в момент, когда делали фотографию.
- 2) Что вы можете сказать про момент съемки (по московскому времени)?
- 3) Оцените высоту здания на другой стороне улицы, которое отбрасывает тень, считая его крышу плоской.
- 4) Определите примерное направление улицы, проходящей между зданиями.

Расстояние между этими зданиями – 14 м, вертикальный размер окна 1 м, оконное стекло расположено вертикально и вдоль улицы. Считайте, что в момент съемки лучи Солнца направлены перпендикулярно этой улице.



Решение. Вначале обратим внимание, что отражение решетки на земле раздваивается, так как решетка отбрасывает тень для прямого солнечного света, идущего к окну и для отраженного солнечного света от окна. Само окно расположено вертикально, и угол A равен высоте Солнца над горизонтом (см. рисунок далее). Край пятна отраженного света на земле формируется верхним краем участка стекла окна, не попадающего в тень рамы или козырька, что нужно учесть при построении, иначе мы можем получить ошибку до 4° в большую сторону. Отсюда мы получаем высоту Солнца над горизонтом: $h = 28^\circ$.



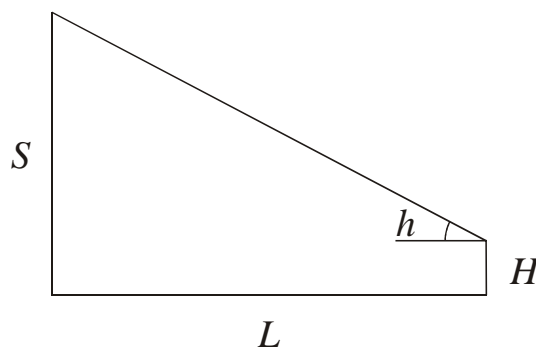
Мы видим, что фото было сделано 10 октября, что достаточно близко ко дню осеннего равноденствия, которое приходится обычно на 22-23 сентября. Мы можем считать видимый путь Солнца по эклиптике отрезком прямой линии, образующей с экватором угол $\varepsilon = 23.4^\circ$. С 22 сентября по 10 октября прошло 18 дней, Солнце сместилось по эклиптике на угол около 18° , уходя к югу от небесного экватора. Тогда склонение Солнца равно:

$$\delta = -18^\circ \sin \varepsilon = -7^\circ.$$

Мы получили правильный ответ в рамках доступной точности, в реальности склонение Солнца в момент съемки составляло -6.7° . Отсюда можно заметить, что максимальная высота Солнца над горизонтом равна $h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta = 28^\circ$. С учетом погрешностей, такие как неровность пола, точность измерений, точность склонения, можно сказать, что высота Солнца примерно соответствует верхней кульминации. Это, правда, не дает нам возможности точно указать время съемки, так как вблизи кульминации высота Солнца в течение длительного времени примерно постоянна. Поэтому мы можем сказать, что фото сделано вблизи солнечного полудня (12ч30м по московскому времени), а улица ориентирована примерно с востока на запад.

Нам осталось определить высоту здания, отбрасывающего тень. По красным линиям на рисунке мы видим, что высота тени на здании H примерно равна вертикальному размеру окна: 1 м. В итоге, высота здания есть равна

$$S = H + L \operatorname{tg} h = 1\text{м} + 14\text{м} \cdot \operatorname{tg} 28^\circ = 8.5\text{м}.$$



Система оценивания.

1 этап – 4 балла. Определение высоты Солнца над горизонтом в момент съемки, точность 2° . При большей ошибке снимается 1 балл за каждый 1° погрешности более 2° , оценка за этап при этом не может быть меньше нуля.

Вероятная ошибка участника: связь края светлого блика на дороге с верхним краем окна. Ошибка составляет 4° , и в этом случае оценка уменьшается на 2 балла.

2 этап – 2 балла. Определение склонения Солнца в день съемки, точность 1° . При большей ошибке снимается 1 балл за каждый 1° погрешности более 1° , оценка за этап при этом не может быть меньше нуля.

3 этап – 2 балла. Вычисление высоты Солнца в верхней кульминации 10 октября, точность 1° . При этом результат может отличаться от приведенного выше в решении, если этап 2 выполнен участником с погрешностью.

4 этап – 4 балла (2+2). Выводы о времени съемки и направлении улицы. Оба вывода следуют из того, что Солнце располагается вблизи верхней кульминации. При этом время и азимут улицы нельзя определить с высокой точностью, так как высота Солнца в это время меняется медленно. Поэтому, если результат отличается от солнечного полудня для времени и «запад-восток» для азимута и при этом представлен с чрезмерной точностью (1 минута для времени и 1° для азимута), то за оценка за этап не может быть выше 2 баллов (1+1). Если данное отличие вызвано ошибками на этом же этапе – он не засчитывается.

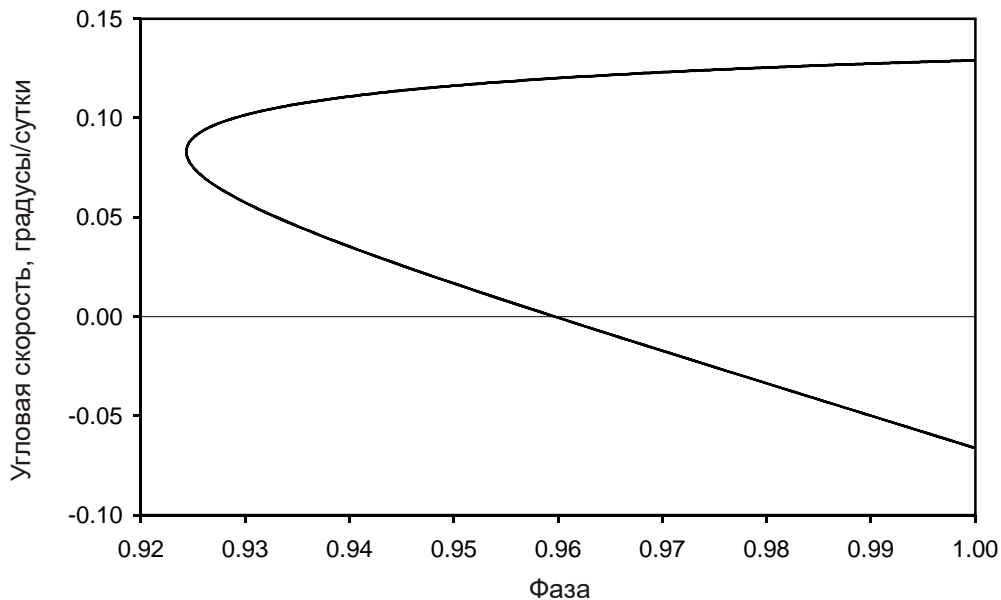
Возможный неверный ход решения: высота Солнца в момент съемки и/или высота Солнца в верхней кульминации вычисляются с ошибкой и в итоге значимо не совпадают друг с другом. В этом случае за этапы 1-3 снижаются баллы, исходя из итоговой погрешности. Если при этом измеренная высота окажется больше, то задача не должна иметь решения. Если участник при этом делает вывод, что причина в ошибках измерения и формулирует ответы для полудня – этап 4 засчитывается полностью. При формулировке «решения нет» оценка за 4 этап не превышает 2 баллов.

В случае, если измеренная высота Солнца оказывается меньше полуденной – участник должен произвести соответствующее определение времени и азимута, качество которого и определяет оценку за 4 этап.

5 этап – 3 балла. Определение высоты противоположного здания, точность 0.5м, при больших ошибках оценка уменьшается на 1 балл на каждые 0.5м дополнительной погрешности.

9.8. Фазовая диаграмма

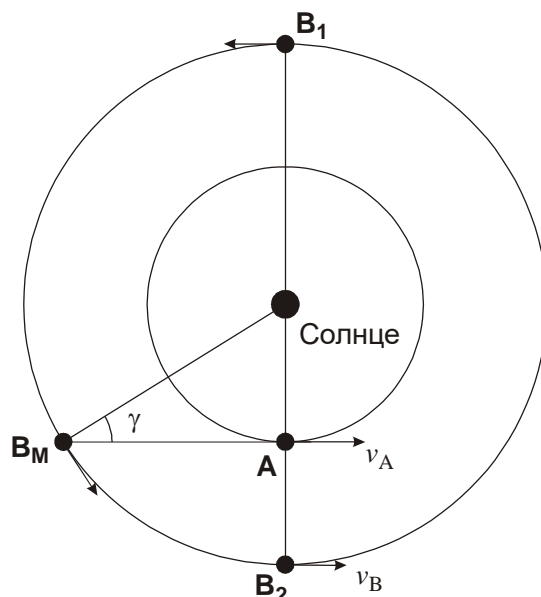
Условие. С некоторого объекта Солнечной системы **A**, движущегося по круговой орбите, проводятся наблюдения другого объекта Солнечной системы **B**, также движущегося по круговой орбите в той же плоскости. Перед Вами диаграмма «фаза – видимая угловая скорость» объекта **B** при наблюдении с объекта **A**. Положительный знак угловой скорости соответствует движению объекта **B** среди звезд в одном направлении с Солнцем, единица измерения угловой скорости – градусы за земные сутки. Оба объекта имеют сферическую форму, эффектами их атмосфер пренебречь. Определите радиусы орбит объектов **A** и **B**.



Решение. На диаграмме мы видим, что у объекта **B** существуют два разных положения, при котором его фаза равна единице. Из этого следует, что объект **B** является внешним по отношению к объекту **A**. В этих двух положениях объект **B** имеет угловую скорость, отличающуюся по знаку, то есть в одном случае объект движется среди звезд прямым движением, а в другом – попятным. При этом максимальная угловая скорость при прямом движении больше максимальной угловой скорости при попятном движении. Это указывает на то, что объекты вращаются вокруг Солнца в одном направлении.

В определенный момент фаза объекта **B** достигает минимума, равного $F_M = 0.924$. Минимум фазы означает максимум угла γ с вершиной в объекте **B**, образованного направлениями на Солнце и объект **A**. Этот же угол есть максимальная элонгация объекта **A** при наблюдении с объекта **B**. Нарисуем соответствующее положение объекта **B** на орбите. Фаза объекта **B** в этом случае равна

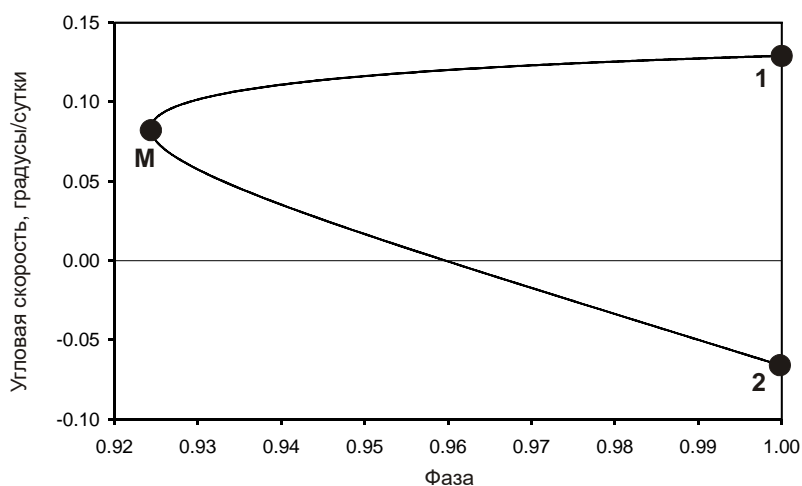
$$F_M = \frac{1 + \cos \gamma}{2} = \frac{1 + (\sqrt{r_B^2 - r_A^2} / r_B)}{2} = \frac{r_B + \sqrt{r_B^2 - r_A^2}}{2r_B}.$$



Отсюда мы получаем

$$\frac{r_A}{r_B} = \sqrt{1 - (2F_M - 1)^2} = 0.530 \equiv K.$$

Обратимся теперь к данным об угловых скоростях. В момент наименьшей фазы объекта В его видимая угловая скорость направлена в ту же сторону, что и Солнце, и имеет положительный знак на графике. Она положительна и в момент 1, соответствующий соединению планеты В с Солнцем при наблюдении с планеты А. Ее численное значение составляет $+0.13^\circ/\text{сут}$, и она выражается через пространственные скорости как



$$\omega_1 = \frac{v_A + v_B}{r_A + r_B}.$$

По условию задачи, орбиты планет круговые, поэтому мы можем подставить сюда выражения для круговых скоростей:

$$\omega_1 = \sqrt{GM} \frac{r_A^{-1/2} + r_B^{-1/2}}{r_A + r_B}.$$

Далее имеем:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_B^3} \frac{K^{-1/2} + 1}{K + 1}} = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r_B} \right)^{3/2} \frac{K^{-1/2} + 1}{K + 1}.$$

Здесь M – масса Солнца, r_0 – радиус орбиты Земли, ω_0 – угловая скорость орбитального движения Земли ($0.986^\circ/\text{сутки}$). Отсюда мы получаем значение радиуса орбиты объекта **B**:

$$\frac{r_B}{r_0} = \left(\frac{\omega_0 \cdot \frac{K^{-1/2} + 1}{K + 1}}{\omega_1} \right)^{2/3} = 5.2.$$

Радиус орбиты тела **B** равен 5.2 а.е., радиус орбиты тела **A** равен $Kr_B = 2.75$ а.е. Очевидно, проводились наблюдения Юпитера с астероида главного пояса.

К тому же выводу мы могли прийти на основе анализа отрицательной угловой скорости объекта **B** в противостоянии (положение **2**)

$$\omega_2 = \frac{v_B - v_A}{r_B - r_A} = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r_B} \right)^{3/2} \frac{K^{-1/2} - 1}{K - 1},$$

$$\frac{r_B}{r_0} = \left(\frac{\omega_0 \cdot \frac{K^{-1/2} - 1}{K - 1}}{\omega_2} \right)^{2/3} = 5.2.$$

или в момент квадратуры (положение **M**)

$$\omega_M = \frac{v_B \cos \gamma}{\sqrt{r_B^2 - r_A^2}} = \frac{v_B}{r_B} = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r_B} \right)^{3/2},$$

$$\frac{r_B}{r_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_M} \right)^{2/3} = 5.2.$$

Последнее соотношение можно легко получить, учитывая, что в этот момент объект **A** находится в наибольшей элонгации при наблюдении с объекта **B**, то есть движется по небу с одинаковой угловой скоростью с Солнцем. А эта угловая скорость равна угловой скорости вращения объекта **B** по орбите. Получается, что мы могли полностью решить задачу, сняв с графика данные всего одной точки – **M**.

Система оценивания. При проверке решения жюри нужно обратить внимание, что оно может быть выполнено множеством способов. Выше предложен лишь один из них, причем и для него, как мы видим, радиус орбиты одного из объектов может быть определен по угловой скорости в одном из трех различных положений. Более того, участники могут вообще не принимать во внимание данные о фазе объекта **B** и найти радиусы орбит по данным об угловой скорости в двух положениях (**1** и **2**, либо **1** и **M**, либо **2** и **M**). Все эти способы предполагают определение из графика двух параметров – либо фазы и угловой скорости в точке **M**, либо угловой скорости в двух точках. Это определяет разделение решения на один вводный и два основных этапа, а также финальный вывод. При этом, сами этапы могут выглядеть по-разному. Далее приведено описание этапов при использовании способа решения, приведенного выше.

1 этап – 1 балл. Обоснование, что объекты движутся по орбитам в одном направлении. Он может быть сделан на основе модулей прямой и попятной угловой скорости в моменты, когда фаза обращается в единицу. Участник может не делать этот вывод, но тогда ему

необходимо рассматривать случай противоположных направлений вращения по ходу дальнейшего решения, доказывая, что его не может быть в данных условиях. Если участник сразу рассматривает только сонаправленное вращение двух тел, не обосновывая такой выбор – данный 1 балл не выставляется, последующие оцениваются в полной мере.

2 этап – 5 баллов. Определение соотношения радиусов орбит двух орбит r_A/r_B . Если это делается на основе данных о фазе, должна быть использована абсцисса точки **М**. Требуемая точность высокая (0.005), так как данное соотношение очень плавно зависит от измеренного значения фазы, и даже если взять фазу, равную 0.92 (край диаграммы), что заведомо неверно, то итоговая погрешность чуть превысит 0.01. Если участник определяет обратную величину r_A/r_B , равную 1.887, то требуемая точность составляет 0.01. При превышении погрешности оценка уменьшается на 1 балл за каждую кратность превышения сверх единицы. Участник может вообще не определять эту величину численно, а подставлять ее выражение в общем виде в дальнейшие вычисления. В этом случае оценка определяется правильностью выражения.

Вероятная ошибка участника: минимум фазы связывается с взаимным положением планет, при котором разница их орбитальных долгот равна 90° . Тогда соотношение радиусов орбит получается равным 0.625. Оценка за этап составляет 1 балл при условии верного вычисления, последующие этапы оцениваются в полной мере.

3 этап – 5 баллов. Построение выражения для радиуса орбиты одного из тел на основе данных об угловой скорости. Оценка определяется правильностью используемой формулы. При возникновении качественных недочетов (путаница в знаках и т.д.) оценка за весь этап не может превышать 1 балла.

4 этап – 4 балла (2 + 2). Вычисление радиусов орбит обоих тел, точность составляет 0.05 а.е. для тела **А** и 0.1 а.е. для тела **В**. Если погрешность не превышает двукратную от заданной, за соответствующий подэтап выставляется 1 балл.